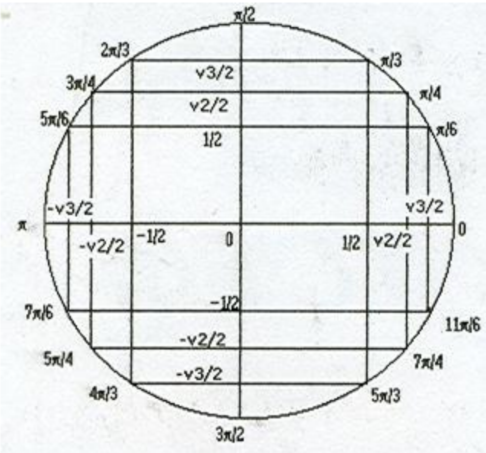
Trigonométrie

1. Savoir

1.1. Cercle trigonométrique et valeurs d'angles

1.1.1. Cercle trigonométrique



	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X	0

1.1.2. Angles associés

	-a	π-a	π+a	$\frac{\pi}{2}$ - a	$\frac{\pi}{2}$ + a
Sin	-sin a	sin a	-sin a	cos a	cos a
Cos	cos a	-cos a	-cos a	sin a	-sin a

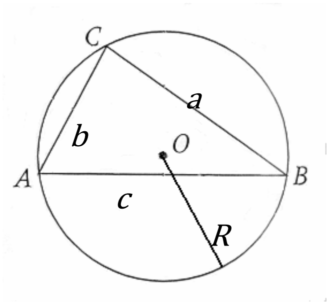
1.1.3. Formules d'addition

	a - b	a + b
Cos	cos a cos b + sin a sin b	cos a cos b – sin a sin b
Sin	sin a cos b – sin b cos a	sin a cos b + sin b cos a

1.1.4. Formules de duplication

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$
$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(\cos 2a + 1) \quad ; \quad \sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$$

1.2. Relations métriques dans un triangle



1.2.1. Formules d'Al-Kashi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\widehat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\widehat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\widehat{C}$$

1.2.2. Aire du triangle

$$S = \frac{1}{2}bc.\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ac.\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab.\sin\widehat{C} = \frac{abc}{4R}$$

1.2.3. Formule des sinus

$$\frac{abc}{2S} = \frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$$

Yves Romani – yves.romani@live.fr

2. Savoir-faire

2.1. Utiliser les angles associés

Calculer les valeurs de $\cos\frac{5\pi}{6}$ et $\sin\frac{5\pi}{6}$.

$$\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Démontrer que $\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6}$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{6} = \cos\left(\frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

Conseil : cherchez à extraire π ou $\frac{\pi}{2}$ de la valeur de l'angle pour appliquer les formules des angles associés.

2.2. Utiliser les Formules d'addition

Soient $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et $\beta = \frac{\pi}{3}$, calculez $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

2.3. Utiliser les Formules de duplication

Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) = \frac{\sqrt{2}+2}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+2}} = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}$$

2.4. Utiliser les Formules d'Al-Kashi

Soit ABC, un triangle, tel que AB = 5, AC = $\sqrt{3}$ et $\widehat{BAC}$ = 30°. Calculez BC.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC\cos\widehat{BAC} = 25 + 3 - 2\times5\times\sqrt{3}\times\cos\frac{\pi}{6} = 28 - 10\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 13$$
$$\Rightarrow BC = \sqrt{13}$$

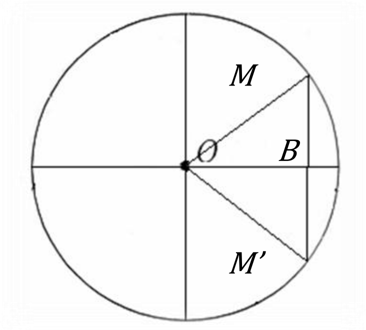
2.5. Calculer l'aire du triangle

Soit ABC, un triangle, tel que AB = 5, AC = $\sqrt{3}$ et $\widehat{BAC}$ = 30°. Calculez l'aire de ce triangle.

$$S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2}5.\sqrt{3}.\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{4}\text{ UA}$$

3. Démonstrations

• $\cos\frac{\pi}{6}$ et $\sin\frac{\pi}{6}$



Soit M tel que $\widehat{BOM} = \frac{\pi}{6}$, alors $\widehat{OMB} = \frac{\pi}{3}$. Soit OBM' le symétrique du triangle OBM par rapport à OB, il est clair que $\widehat{OM'B} = \frac{\pi}{3}$ et $\widehat{M'OM} = \widehat{BOM} + \widehat{BOM'} = \frac{\pi}{3}$.
Le triangle MOM' est donc un triangle équilatéral avec OM = OM' = MM' = 1, on a alors : $MB = \frac{1}{2}$ donc $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

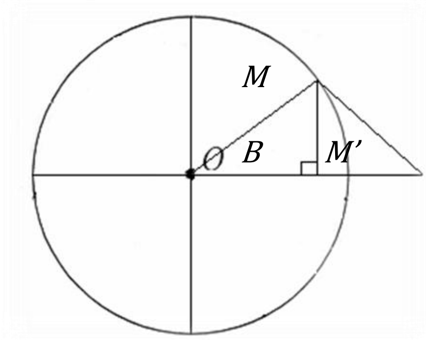
Comme $BM = \frac{1}{2}$ et OM = 1, par le théorème de Pythagore il vient : $OB = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit donc $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

• $\cos\frac{\pi}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{4}$

Si $\widehat{BOM} = \frac{\pi}{4}$ alors que le triangle OBM est rectangle en B alors $\widehat{OMB} = \frac{\pi}{4}$ également et le triangle est isocèle donc OB = BM. Comme OM = 1 alors, par pythagore, il vient :

$$OB = BM = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

• $\cos\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{\pi}{3}$



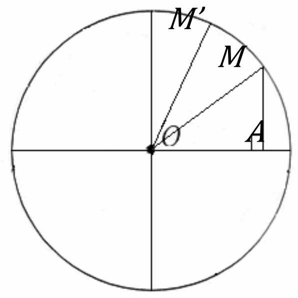
Soit M tel que $\widehat{BOM} = \frac{\pi}{3}$, alors $\widehat{OMB} = \frac{\pi}{6}$. Soit MBM' le symétrique du triangle OBM par rapport à MB, il est clair que $\widehat{BMM'} = \frac{\pi}{6}$ et $\widehat{OMM'} = \widehat{OMB} + \widehat{BMM'} = \frac{\pi}{3}$.
Le triangle MOM' est donc un triangle équilatéral avec OM = MM' = OM' = 1, on a alors : $OB = \frac{1}{2}$ donc $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

Comme $OB = \frac{1}{2}$ et OM = 1, par le théorème de Pythagore il vient : $MB = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit donc $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

 Yves Romani – yves.romani@live.fr

3.1. Formules d'addition

Nous utiliserons le cercle trigonométrique suivant dans la plupart de nos démonstrations et nous poserons : $\widehat{AOM'} = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}\right) = $ a et $\widehat{AOM} = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right) = $ b



3.1.1. cos (a-b) = cos a cos b + sin a sin b

1ère étape :

Il est clair que $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = $ a-b.

De plus : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = \text{OM}\times\text{OM'}\times\cos(\text{a-b})$ or OM = OM' = 1, donc :

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = \cos(\text{a-b})$$

2nde étape

Egalement, on a clairement : $\overrightarrow{OM}$ (cos a; sin a) et $\overrightarrow{OM'}$ (cos b; sin b), donc :

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Conclusion : $\cos(\text{a-b}) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

3.1.2. Cos (a+b) = Cos a Cos b - Sin a Sin b

$$\cos(\text{a+b}) = \cos(\text{a-(-b)}) = \cos a \cos(\text{-b}) + \sin a \sin(\text{-b})$$
$$\text{or } \cos(\text{-a}) = \cos a \text{ et } \sin(\text{-b}) = -\sin b$$
$$\text{De là : } \cos(\text{a+b}) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

3.1.3. sin (a-b) = sin a cos b - sin b cos a

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, alors :

$$\sin(\text{a-b}) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a - b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b$$
$$= \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

3.1.4. sin (a+b) = sin a cos b + sin b cos a

$$\sin(\text{a+b}) = \sin[a - (-b)] = \sin a \cos(\text{-b}) - \sin(\text{-b}) \cos a = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

3.1.5. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

On a démontré que $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, en remplaçant b par a on obtient : $\cos 2a = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$

Comme $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ alors $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$ et :

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1-\cos^2 a) = \cos^2 a - 1 + \cos^2 a = 2\cos^2 a - 1$$

De la meme façon que précedemment, $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ et :

$$\cos^2 a - \sin^2 a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$$

3.1.6. $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

On a démontré que $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, en remplaçant b par a on obtient : $\sin 2a = \sin a \cos a + \sin a \cos a = 2 \sin a \cos a$

3.1.7. $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1)$

On a démontré : $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ donc $2\cos^2 a = \cos 2a + 1$, d'où :

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(\cos 2a + 1)$$

3.1.8. $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$

On a démontré : $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ donc $2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$, d'où :

$$\mathrm{Sin}^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{Cos}2\alpha)$$

3.2. Formules d'Al-Kashi

$$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AB} =$$
$$AC^2 + AB^2 - 2\,\|\overrightarrow{AC}\|\times\|\overrightarrow{AB}\|\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

Note : il faudra faire de même pour démontrer $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$

3.3. Aire du triangle

Soit ABC un triangle et CH la hauteur issue de C et coupant AB en H. Soit AB = c, AC = b et BC = a.

La même démonstration doit être utilisée pour prouver les autres formules en utilisant successivement la hauteur issue de A puis de B.

1er cas : Â est aigu

Il est clair que $CH = AC.\sin\hat{A}$ d'où $S = \frac{1}{2}bc.\sin\hat{A}$

 Yves Romani – yves.romani@live.fr

2ème cas : Â est droit

On a $S = \frac{1}{2}bc$, or $\sin \hat{A} = 1$ d'où : $S = \frac{1}{2}bc.\sin\widehat{A}$

3ème cas : Â est obtus

La hauteur issue de C est à l'extérieur du triangle et on a : $CH = b.\sin\widehat{CAH} = b.\sin(\pi\text{-}\hat{A}) = b.\sin\hat{A}$ d'où $S = \frac{1}{2}bc.\sin\widehat{A}$

3.4. Formule des sinus

On a démontré précédemment que : $S = \frac{1}{2}bc.\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ac.\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab.\sin\widehat{C}$, on a donc :

$$2S = bc.\sin\widehat{A} = ac.\sin\widehat{B} = ab.\sin\widehat{C} \Leftrightarrow \frac{2S}{abc} = \frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$$