Probabilités

1. Savoir

1.1. Vocabulaire

$A \cap B$ est l'événement « A et B » (A et B sont réalisés simultanément)
$A \cup B$ est l'événement « A ou B » (on réalise soit A, soit B, soit $A \cap B$)
$\overline{A}$ est l'événement contraire de A

1.2. Probabilités simples

1.2.1. Dans le cas général

$$P(A) = \frac{\text{nbre d'éléments de A}}{\text{nbre d'éléments de } \Omega}$$

$$P(\emptyset) = 0 \qquad ; \qquad P(\Omega) = 1$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + \ldots + P(A \cap B_n)$$

(avec B_1, ..., B_n formant une partition sur Ω c'est-à-dire $B_1 \cap \ldots \cap B_n = \emptyset$ et $B_1 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$)

1.2.2. Si A et B sont incompatibles

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

1.2.3. Si A et B sont indépendants

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

1.3. Probabilités conditionnelles

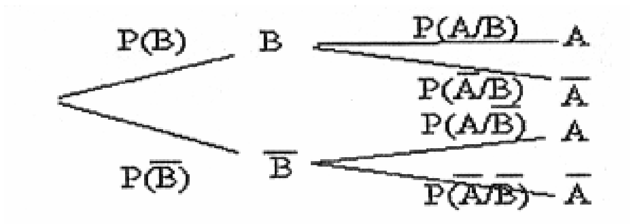
La probabilité de A sachant B réalisé est : $P_B(A) = P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B) = P_A(B) \times P(A)$$

$$P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$$

Si les événements et B sont indépendants alors : $P_B(A) = P(A)$

1.4. Réalisation d'un arbre



Si l'arbre est correctement réalisé, il permet de retrouver toutes les probabilités d'intersection *(puisque $P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B) = P(B/A) \times P(A)$)*

1.5. Loi de probabilité

1.5.1. Loi équirépartie

Si Ω a n résultats possibles, la probabilité d'un résultat est $\frac{1}{n}$ (tous les résultats ont la même probabilité).

Si A est un événement composé de m résultats, alors : $P(A) = \dfrac{m}{n}$

1.5.2. Loi de Bernoulli

Consiste à effectuer une expérience aléatoire n'ayant que deux résultats possibles (succès et échec). Si la probabilité du succès est *p*, alors la probabilité de l'échec est *1-p*.

1.5.3. Loi binomiale

Correspond à une loi de Bernoulli répétée n fois.

La probabilité p d'avoir k succès et la probabilité q = 1 – p d'avoir n – k échecs au cours de n épreuves identiques et indépendantes est :

$$p^k \times q^{n-k}$$

Lorsque les valeurs de n sont petites, la réalisation d'un arbre est la meilleure solution.

 Yves Romani – yves.romani@live.fr

1.6. Variable aléatoire

1.6.1. Loi de probabilité

Lorsqu'à chaque éventualité d'une expérience aléatoire on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une variable aléatoire.

Lorsque l'on associe une probabilité à la valeur prise par une variable aléatoire on définit une loi de probabilité qui se présentera sous forme de tableau :

Valeur a_i	a_1	a_2	…	a_n
$P(X = a_i)$	p_1	p_2	…	p_n

1.6.2. Espérance

On appelle espérance la moyenne des résultats pondérés :

$$E(X) = \sum a_i \, p_i$$

1.6.3. Variance

On appelle variance la moyenne arithmétique des carrés des écarts des valeurs :

$$V(X) = \sigma^2 = \frac{\sum (a_i - E(X))^2}{n}$$

Ou l'espérance des carrés moins le carré de l'espérance :

$$\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = \Sigma \, a_i^2 \, p_i - (\Sigma \, a_i \, p_i)^2$$

1.6.4. Ecart-type

On appelle écart-type la racine carré de la variance :

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

2. Savoir faire

2.1. Déterminer si deux événements sont incompatibles

Soient A et B deux événements d'un ensemble de résultats muni d'une loi de probabilité P. On donne $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cup B) = 0{,}8$.

- Calculez $P(A \cap B)$
- Les évènements A et B sont-ils incompatibles ?

Corrigé :

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  Donc : $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}6 - 0{,}8 = 0{,}1$

- Deux événements sont incompatibles $\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0$
  or ici $P(A \cap B) \neq 0$ donc A et B ne sont pas incompatibles.

2.2. Déterminer si deux événements sont indépendants

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Soit A l'événement « la carte est un as » et C l'événement « la carte est un cœur ».

- Calculez $P(A)$
- Calculez $P(C)$
- Calculez $P(A \cap C)$
- Les événements A et C sont-ils indépendants ?

Corrigé :

- Comme il y a 4 as dans un jeu de 32 cartes alors :

$$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

- Comme il y a 8 cœurs dans un jeu de 32 cartes (ou que les cœurs représentent une couleur sur les quatre) :

$$P(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

- L'événement $A \cap C$ correspond à l'événement : « la carte est un as de cœur ». Comme il n'y a qu'un as de cœur dans un jeu de 32 cartes, on a :

$$P(A \cap C) = \frac{1}{32}$$

- Les événements A et C sont indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$

$$\text{Or } P(A) \times P(C) = \frac{1}{8} \text{ x } \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = P(A \cap C)$$

Les événements A et C sont donc indépendants.

Yves Romani – yves.romani@live.fr

2.3. Calculer une probabilité conditionnelle

Au sein d'une population on dénombre 60% de personnes vaccinées contre une certaine maladie, mais le vaccin n'étant pas fiable à 100%, 10% des personnes vaccinées ont attrapé la maladie. Par contre 30% des personnes non vaccinées ne sont pas malades.

- Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade et vaccinée ?
- Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade et non vaccinée ?
- En déduire la probabilité de contracter la maladie.
- Quelle est la probabilité qu'une personne en bonne santé ait été vaccinée ?

Corrigé :

La plupart du temps il est utile de faire un tableau ou un arbre. Soit V les vaccinés et M les malades :

	V	$\overline{V}$	total
M	6	28	34
$\overline{M}$	54	12	66
total	60	40	100

On peut également traduire les données de l'énoncé en terme de probabilité :
« 60% de personnes vaccinées » permet d'affirmer $P(V) = 0{,}6$
« 10% des personnes vaccinées ont attrapé la maladie » correspond à $P_V(M)=0{,}1$.
« 30% des personnes non vaccinées ne sont pas malades » correspond à $P_{\overline{V}}(\overline{M})=0{,}3$.

- Par lecture du tableau on a $P(M \cap V) = \frac{6}{100} = 0{,}06$

  On peut également faire le calcul par les données de l'énoncé :

$$P_V(M) = \frac{P(M \cap V)}{P(V)}$$

$$P(M \cap V) = P_V(M) \times P(V)$$

- De la même façon : $P(M \cap \overline{V}) = \frac{28}{100} = 0{,}28$

  ou : $P(M \cap \overline{V}) = P(V)\times P_{\overline{V}}(M) = (1 - P(V)) \times (1 - P_{\overline{V}}(\overline{M})) = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$

- Toujours deux méthodes :

  Soit on déduit des questions précédentes :

  $P(M) = P(M \cap V) + P(M \cap \overline{V}) = 0{,}06 + 0{,}28 = 0{,}34$

  Soit on lit dans le tableau : $P(M) = \frac{34}{100} = 0{,}34$

- Pareillement :

  Soit on calcule : $P_{\overline{M}}(V) = \frac{P(V \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{P(V) \times P_V(\overline{M})}{1-P(M)} = \frac{P(V)\times (1- P_V(M))}{1-P(M)}$

  $= \frac{0{,}6 \times 0{,}9}{1 - 0{,}34} = \frac{0{,}54}{0{,}66} \approx 0{,}82$

  Soit on lit dans le tableau : à $P_V(\overline{M}) = \frac{54}{66} \approx 0{,}82$

2.4. Loi binomiale

Une urne contient 10 boules noires et 90 boules rouges. On tire successivement avec remise quatre boules de cette urne. Tous les tirages sont indépendants.

- Quelle est la probabilité de tirer uniquement des boules noires ?
- Quelle est la probabilité de tirer exactement deux boules noires ?
- Quelle est la probabilité de tirer au moins une boule rouge ?

Corrigé :

Soit N les boules noires et R les boules rouges

- Une seule façon de tirer uniquement des boules noires : NNNN. Ce qui revient à calculer : $0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}0001$.
- Il n'y a que six issues possibles si on tire deux boules noires exactement : RRNN, RNRN, RNNR, NRRN, NRNR et NNRR. Chaque solution revient à calculer : $0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}0081$. Et comme il y a six issues, on a : $6 \times 0{,}0081 = 0{,}0486$
- Comme « tirer au moins une boule rouge » est l'événement contraire de « tirer aucune boule rouge » (c'est-à-dire tirer uniquement des boules noires), alors on calcule $1 - 0{,}0001 = 0{,}9999$

2.5. Calculer l'espérance et la variance

Voici la loi de probabilité de gain d'un jeu :

x_i	-5	-1	0	4
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

- Calculez l'espérance de cette loi
- Calculez la variance de cette loi
- Ce jeu est-il équitable ?

Corrigé :

- $E(X) = \Sigma\, x_i\, p_i = -5\times 0{,}2 + -1\times 0{,}3 + 0\times 0{,}4 + 4\times 0{,}1 = -0{,}9$
- $V(X) = (\Sigma\, E(X^2)) - (E(X))^2$

  $= -5^2\times0{,}2 + -1^2\times0{,}3 + 0^2\times0{,}4 + 4^2\times0{,}1 - (-0{,}9)^2 = 5{,}29$
- Le jeu n'est pas équitable. Si le jeu était équitable, l'espérance serait nulle.

Yves Romani – yves.romani@live.fr

3. Démonstrations du cours

• $P(\emptyset) = 0$

Comme : $\Omega = \Omega \cup \emptyset$
Alors : $P(\Omega) = P(\Omega) \cup P(\emptyset) \Leftrightarrow P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset) \Leftrightarrow P(\emptyset) = P(\Omega) - P(\Omega) = 0$

• $0 \leq P(A) \leq 1$

Soit A, un événement composé de la somme des éléments $a_1, a_2, \dots, a_n$.
Comme $A \subseteq \Omega$, les éléments de A sont aussi dans Ω. Notons $e_1, e_2, \dots, e_m$ les éléments contenus dans Ω mais pas dans A.

1ère étape : $P(A) \leq 1$

Nous avons : $\Omega = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_n}_{A} + e_1 + e_2 + \dots + e_m$

Donc : $P(\Omega) = P(A) + P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_m)$

Or, tous les termes sont positifs donc : $P(A) \leq P(\Omega)$
$P(A) \leq 1$

2nde étape : $0 \leq P(A)$

Nous avons vu ci-dessus que P(A) est une somme de termes tous positifs, donc P(A) est positif.

• $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Soient A et B deux ensembles.
Soient $A_1, A_2, \dots, A_m$, les événements contenus dans A mais pas dans $A \cap B$.
Soient $B_1, B_2, \dots, B_n$, les événements contenus dans B mais pas dans $A \cap B$.
Soient $I_1, I_2, \dots, I_p$, les événements contenus dans $A \cap B$.
On a : $A = \{ A_1, A_2, \dots, A_m, I_1, I_2, \dots, I_p \}$
$B = \{ B_1, B_2, \dots, B_n, I_1, I_2, \dots, I_p \}$
$A \cap B = \{ I_1, I_2, \dots, I_p \}$
$A \cup B = \{ A_1, A_2, \dots, A_m, I_1, I_2, \dots, I_p, B_1, B_2, \dots, B_n \}$

Donc : $P(A \cup B) = \underbrace{P(A_1) + \dots + P(A_m) + P(I_1) + \dots + P(I_p)}_{P(A)} + P(B_1) + \dots + P(B_n)$
$= P(A) + P(B_1) + \dots + P(B_n)$

Or $P(B) = P(B_1) + \dots + P(B_n) + \underbrace{P(A_1) + \dots + P(I_p)}_{P(A \cap B)}$
$= P(B_1) + \dots + P(B_n) + P(A \cap B)$
Donc : $P(B_1) + \dots + P(B_n) = P(B) - P(A \cap B)$
D'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

• $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Par définition, on a $A \cup \overline{A} = \Omega$
$A \cap \overline{A} = \emptyset$
On a démontré précédemment que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Donc : $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) - P(A \cap \overline{A})$.
Or, $P(\Omega) = 1$ et $P(A \cap \overline{A}) = 0$,

D'où $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

• $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (B \cup \overline{B})) = P((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}))$
Or $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ étant incompatibles, on a $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = A \cap B \cap \overline{B} = \emptyset$

D'où (grâce à $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ démontrée à l'avant-dernier point de cette page) :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

• $P(A) = P(A \cap B_1) + \ldots.. + P(A \cap B_n)$ *avec ($B_1, B_2, \ldots, B_n$ formant une partition de Ω)*

Soit $B_1, B_2, \ldots, B_n$ formant une partition de Ω (ce qui signifie $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$ et $B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n = \emptyset$).
A est la réunion des événements $A \cap B_1$, $A \cap B_2$, …, $A \cap B_n$. Or, ces événements sont incompatibles donc (voir le point suivant) :

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n)$$

• $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *lorsque les événements sont incompatibles*

On a démontré page 7 que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Or, si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \emptyset$ et donc $P(A \cap B) = 0$.

D'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

• $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ *lorsque A et B sont indépendants*

Soient A et B deux événements quelconques, on a (voir démonstration suivante) :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P_B(A) \times P(B) = P(A \cap B)$$

Or, si A et B sont indépendants alors on a : $P_B(A) = P(A)$.

D'où : $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$

 Yves Romani – yves.romani@live.fr

• $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Soit un univers à N éléments composé de n_A éléments A, n_B éléments B et n_c éléments $A \cap B$.

On a : $P(A) = \frac{n_A}{N}$, $P(B) = \frac{n_B}{N}$, $P(A \cap B) = \frac{n_C}{N}$

Si l'on sait avec certitude que B est réalisé, la probabilité P(A) peut avoir été changée.
Le nouvel univers est semblable au premier univers auquel on aurait retiré toutes les boules qui ne sont pas marquées B.

On a donc : $P_B(A) = \frac{n_C}{n_B} = \frac{n_C/N}{n_B/N} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

• $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B) = P_A(B) \times P(A)$

On a vu précédemment que : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Donc : $P_B(A).P(B) = P(A \cap B)$
De la même façon, on sait que : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
Donc : $P_A(B) \times P(A) = P(A \cap B)$

• $P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) \Leftrightarrow 1 = \frac{P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})}{P(B)} \Leftrightarrow 1 = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} + \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(B)}$$

$$\Leftrightarrow 1 = P_B(A) + P_B(\bar{A}) \Leftrightarrow 1 - P_B(A) = P_B(\bar{A})$$